XIV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

правила и регламент основного тура 21 декабря 2020 г. — 24 января 2021 г.

1. Участие в основном туре

Дорогие участники олимпиады, родители и учителя. В целях популяризации математики и, в особенности, теории вероятностей и статистики – разделов математики, наиболее близких к жизни, мы с 2008 г. проводим эту заочную олимпиаду. Основной тур содержит 19 заданий, из которых 3 задания – эссе (небольшое сочинение на заданную тему) и 16 заданий – это задачи, требующие полного решения.

Участвовать в основном туре может любой школьник, студент ССУЗа, колледжа, лицея и так далее, независимо от участия, неучастия или результатов пригласительного тура.

ВНИМАНИЕ!

Каждую задачу мы рекомендуем участникам, начиная с некоторого класса. Это указание – ориентир для участников; оно не является ограничением.

Любой участник может выполнять любое задание независимо от рекомендаций. Баллы начисляются в соответствии с критериями независимо от класса. Разница в возрасте учитывается при награждении и определении призеров и победителей.

2. Рассылка материалов

Все участники самостоятельно получают анкету, задания и настоящие правила на странице основного тура http://ptlab.mccme.ru/node/1702 .

3. Выполнение работы

В ходе раздумий над заданиями Вы можете пользоваться любыми источниками (справочниками, учебниками, интернетом, получать консультации от учителя, от нас) по поводу теории вероятностей и статистики. Большую помощь может оказать изучение решений задач прошлых лет (см. архив на странице основного тура), посещение дистанционного кружка по теории вероятностей (http://ptlab.mccme.ru/node/1483). Неэтичным и попросту недопустимым является лишь прямое списывание или выполнение заданий за участника кем-то другим. Для консультаций с нами используйте, пожалуйста, форум «Консультация» на нашем сайте http://ptlab.mccme.ru. У Вас больше месяца. Пожалуйста, не откладывайте все на последний день, но и не спешите.

3. Отсылка решений, проверка и оценивание

Свои решения и заполненную анкету участника нужно отправить в любом текстовом или графическом формате (doc, docx, pdf, jpg и т. п.) на электронный адрес **prob-in-school@yandex.ru** до истечения суток 24 января 2021 года по московскому времени. Ответы и решения, высланные 25 января или позже, не принимаются. Ваши решения проверит оргкомитет.

Решения задач будут опубликованы на странице основного тура 25 января. Лучшие эссе будут опубликованы чуть позже по мере проверки.

4. Определение призеров и победителей, награждение

При проверке задания оцениваются разным числом баллов, в зависимости от их сложности (максимальный балл за задачу указан в условии). Единственное требование, предъявляемое к решению задачи – решение должно быть верным.

Отдельно происходит определение призеров и победителей в 6–7 классах (и младше при наличии), отдельно в 8–9 классах и отдельно – в 10–11. Отдельно производится оценка эссе и награждение авторов лучших эссе (независимо от возраста).

Критерии награждения оргкомитет публикует после олимпиады, исходя из результатов. Претензии по критериям награждения не принимаются.

Победители и призеры получают дипломы и грамоты. Порядок и регламент награждения будет определен оргкомитетом, и вся необходимая информация будет размещена на странице олимпиады.

5. Апелляция

Апелляция по основному туру **проводится по электронной почте с 31 января по 6 февраля** включительно. Форма апелляции будет размещена на странице основного тура. **Оргкомитет прекратит переписку по поводу апелляций после 6 февраля**, независимо от того, все ли вопросы выяснены. При наличии разногласий просим уложиться в срок.

Искренне желаем удачи

Отдельное замечание

Мы редко сталкиваемся со случаями списывания и другими недобросовестными попытками искажения результатов. Но все же бывает. Если у оргкомитета возникают сомнения в самостоятельности выполнения работы, оргкомитет вправе дисквалифицировать работу без дополнительных согласований.

Анкета участника

Заполните, пожалуйста, поля анкеты и пришлите нам эту анкету вместе со своей работой – *одним письмом*. Обязательные поля помечены символом *.
Проверка Вашей работы будет проведена при наличии заполненной анкеты.

* Участник (ФИО):

* В каком классе вы учитесь?

* Ваш почтовый адрес:

* Адрес электронной почты:

Телефон (по которому можно Вам позвонить):

* Публиковать ли Вашу фамилию и имя в списке победителей, если Вы станете победителем тура? **Да**

Если Вы удалили «Да», то в списке вместо фамилии будет Ваш инициал. Например, *Василий К.*

Если есть, напишите, пожалуйста, свои впечатления, замечания, предложения или пожелания, чтобы мы могли учесть их в будущем:

Отправляя эту анкету, вы тем самым даете согласие на обработку Ваших персональных данных в той мере, в какой это необходимо для проверки работы, составления списка участников, призеров и победителей.

Эссе

Эссе – это сочинение небольшого объема на заданную тему. В отличие от задач, эссе не подразумевает точных решений, ответов или методов, но должно быть продуманным, аргументированным, подробным.

Вы можете выбрать любое эссе, или два, или даже все три. Эссе оцениваются отдельно. Баллы за эссе не суммируются и не прибавляются к баллам, полученным за решение задач. За лучшие эссе участники награждаются отдельными дипломами.

1. Взаимовыгодная лотерея. Любая лотерея основана на простом и проверенным столетиями вероятностном факте: если цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша на этот билет, то в силу закона больших чисел лотерея принесет доход своим устроителям. Деньги перераспределятся между теми, кто выиграл, и организаторами лотереи, и за всё заплатят те, кто не выиграл ничего.

Некоторый парадокс заключается в том, что каждый отдельный участник не мыслит категориями больших чисел. Для него вероятность выигрыша важнее математического ожидания, ведь он покупает только один билет. Но вероятность даже небольшого выигрыша очень мала, и это обстоятельство отталкивает от лотерей гораздо больше игроков, чем может привлечь астрономическая сумма главного выигрыша.

Можно ли устроить лотерею, которая будет приносить доход устроителям, но будет привлекательна для большого числа игроков? Можно ли сформулировать, что такое «выгодная лотерея для устроителей» и что такое «выгодная лотерея для игрока»? Если лотерея, которая выгодна одновременно в обоих этих смыслах, невозможна, то хотелось бы получить обоснованное доказательство этого. Если же такая лотерея теоретически может существовать, то нужно привести пример правил, обеспечивающих взаимную выгоду.

2. Нетранзитивные кости. Русскоязычная Википедия содержит хорошую и несложную статью о нетранзитивных костях:

https://ru.wikipedia.org/wiki/Нетранзитивные кости

Если у каждого из трёх игроков по одной из трёх костей, образующих нетранзитивный набор, то можно понять, как будут распределяться выигрыши, и у кого из игроков сумма выигрыша будет накапливаться при большом числе игр.

Можно ли придумать набор из трёх нетранзитивных костей для трёх игроков, который удовлетворяет заранее заданным условиям? Например, условие может быть таким: в результате длительной игры вся сумма, стоящая на кону, должна распределиться между игроками, играющими соответственно костями А, Б и В, в отношении 1:2:3.

Существует ли общий способ найти набор из трёх нетранзитивных костей при заданном распределении выигрышей? А набор из четырёх костей?

Будет интересно, если кто-то из участников олимпиады сумеет написать небольшое эссе на эту тему. Если эссе будет действительно интересным, его можно будет превратить в статью для популярного журнала «Квантик».

3. Бросание кости до первой шестёрки. На открытом уроке учительница математики моделировала геометрическое распределение[1] для иллюстрации распределения случайной величины «число попыток до достижения первого успеха». Она попросила каждого ученика бросать кубик до тех пор, пока не выпадет шестёрка, и записать, сколько на это потребовалось бросков. Каждый ученик должен был повторить этот эксперимент три раза. Набор полученных чисел дал распределение случайной величины «число бросков до первой шестёрки».

На уроке присутствовала другая учительница, которая решила повторить такую работу в своём классе. Она заметила, что у некоторых учеников три шестёрки выпали довольно быстро, и они бездельничали, поджидая, пока невезучие одноклассники их нагонят.

Поэтому вторая учительница усовершенствовала опыт: она попросила каждого из своих учеников бросать кубик ровно пяти минут, отмечать выпадение шестёрок и каждый раз записывать, через сколько бросков случилась очередная шестёрка. После этого она взяла все числа, записанные школьниками, и тоже построила распределение величины «число бросков до первой шестёрки».

Действительно ли два этих опыта моделируют одно и то же геометрическое распределение? Если они различаются, то каким образом и почему?

[1] Название связано с тем, что вероятности в этом распределении образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и со знаменателем $q = 1 - p$ (p и q — традиционные обозначения вероятностей успеха и неудачи в каждом отдельном испытании).

Для написания эссе на эту непростую тему потребуется довольно много экспериментировать. Для экспериментов можно использовать готовые программы для бросания игральных костей или даже обычный Excel.

Задачи

4. Города Анчурии (от 6 класса, 1 балл). В Анчурии одна река Рио-Бланко, которая берёт начало где-то в горах и впадает в океан, и всего пять городов: Сан-Матео, Аласан, Коралио, Альфоран и Солитас.

На рисунке показана карта Анчурии, но названий городов нет, города отмечены цифрами. В таблице даны некоторые общие сведения обо всех пяти городах. Определите, где какой город на карте.

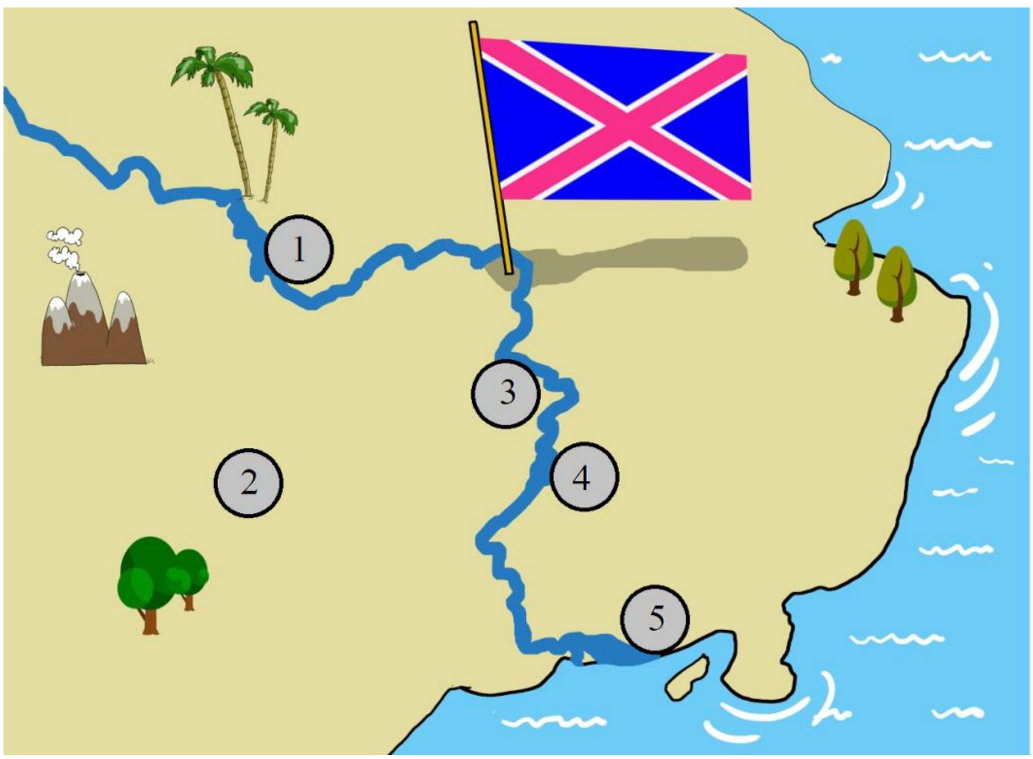

Рис. 1. Точная карта Анчурии (картограф Николай Крутиков)

Табл. Города Анчурии

Город	Площадь, (кв.мили)	Население, (тыс.чел.)	Основная статья дохода	Высота центра города над уровнем моря (в футах)	Источник пресной воды
Сан-Матео	18,3	120,2	Сувенирная промышленность	117	р. Рио-Бланко
Коралио	8,4	30,3	Экспорт обуви	5	р. Рио-Бланко
Аласан	12,0	45,9	Банановодство	349	Колодцы и скважины
Альфоран	9,4	19,6	Доходы от проведения турниров по шашкам	593	р. Рио-Бланко
Солитас	4,1	8,4	Нет доходов	232	р. Рио-Бланко

5. Четыре подруги (от 6 класса, 1 балл). Маша, Нина, Лена и Оля – подруги. Все они разного роста, но разница совсем невелика – на глаз не определить. Однажды они решили узнать, кто выше, а кто ниже. Оказалось, что Нина ниже Маши, а Лена выше Оли. Какова при этом условии вероятность того, что Нина выше Лены?

6. Экспериментальный учебник (от 6 класса, 2 балла). При испытании нового учебника по математике в эксперименте приняли участие примерно одинаковые по численности параллели седьмых классов из двух школ. В каждой школе часть семиклассников училась по экспериментальному учебнику, а часть – по обычному старому учебнику. В конце учебного года был проведен итоговый тест, который показал, насколько хорошо семиклассники освоили учебный материал.

Табл. 1. Результаты теста в 1-й школе

	Учились по экспериментальному учебнику	Учились по обычному учебнику
Выполнили тест хорошо	30%	15%
Выполнили тест плохо	35%	20%
Доля тех, кто выполил хорошо	0,46	0,43

Табл. 2. Результаты теста во 2-й школе

	Учились по экспериментальному учебнику	Учились по обычному учебнику
Выполнили тест хорошо	20%	45%
Выполнили тест плохо	10%	25%
Доля тех, кто выполнил тест хорошо	0,67	0,64

В обеих школах доля тех, кто выполнил тест хорошо, оказалась выше в группе тех, кто учился по экспериментальному учебнику. Поэтому был сделан вывод, что новый учебник обеспечивает более высокое качество образования.

Только Рассеянный Учёный выступил против нового учебника и ко всеобщему удивлению заявил, что те, кто учился по новому учебнику, сдали тест в среднем хуже, чем те, кто учился по старому.

Кто прав?

7. (От 7 класса, 1 балл). Турнир по анчурийским шашкам проводится в несколько туров. Если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Ничьей случиться не может, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира.

На турнир по анчурийским шашкам приехало 26 участников, причем все они играют одинаково хорошо, то есть в партии, которую играют любые двое, шансы соперников одинаковы. Среди игроков Денис и Олег. Найдите вероятность того, что они сыграют между собой[2].

8. Путь короля (от 7 класса, 2 балла). Шахматный король находится на поле a1 шахматной доски и хочет пройти на поле h8, двигаясь вправо, вверх или вправо-вверх. Сколькими способами он может это сделать?

9. Буратино-статистик (от 7 класса, 2 балла). Буратино каждый месяц играет в лотерею «6 из 45», устроенную Карабасом-Барабасом. В лотерее 45 пронумерованных шаров и в каждом тираже выпадает 6 случайных выигрышных шаров.

[2] Автор задачи Б.Р.Френкин

Буратино заметил, что в каждом следующем тираже не бывает шаров, выпавших в предыдущем тираже: во втором тираже не было шаров из первого, в третьем – из второго и т. д.

Буратино не верит в события, вероятность которых меньше чем 0,01. Если происходит такое событие, то Буратино начинает подозревать неладное. После какого тиража Буратино начнет подозревать, что Карабас-Барабас жульничает?

10. Произведение цифр (от 7 класса, 3 балла). Незнайка решал следующую задачу. «Дан набор из 20 случайных цифр. Найдите вероятность того, что произведение этих цифр оканчивается на 0». Незнайка рассуждал так.

Если набор содержит цифру 0*, то произведение цифр точно оканчивается на 0. Вероятность этого равна* $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$*. Если номер не содержит* 0 *(вероятность этого* $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$*), то, чтобы произведение было нулевым, он должен содержать хотя бы одну чётную цифру и цифру* 5.

Всего есть девять ненулевых цифр, из них только четыре чётные. Вероятность того, что все цифры нечётные, равна $\left(\frac{5}{9}\right)^{20}$*, значит, вероятность того, что есть хотя бы одна чётная цифра, равна* $1-\left(\frac{5}{9}\right)^{20}$.

После того как мы удостоверились, что в номере нет нуля, но есть чётная цифра, надо убедиться в том, что есть цифра 5. Условная вероятность того, что пятёрки нет, при условии, что есть чётная цифра, равна $\left(\frac{8}{9}\right)^{19}$*, ведь одна позиция занята чётной цифрой, так что пятёрка на этой позиции точно стоять не будет, остаётся 19 позиций, и пятёрка отсутствует, если на каждой из них одна из восьми цифр (не* 5 *и не* 0*). Поэтому условная вероятность* *того, что пятёрка есть, равна* $1-\left(\frac{8}{9}\right)^{19}$*. Следовательно, искомая вероятность равна*

$$\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^{20}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^{19}\right)\approx 0{,}987.$$

Знайка провёл эксперимент: он сгенерировал на компьютере 1000 случайных последовательностей по 20 цифр в каждой и нашёл долю тех последовательностей, где произведение цифр оканчивалось нулём. Эксперимент дал результат близкий к ответу Незнайки. Расхождение оказалось совсем небольшим и, возможно, случайным, если Незнайка правильно решил задачу. Или не случайным?

Повторите эксперимент Знайки несколько раз. Удаётся ли с помощью эксперимента подтвердить или опровергнуть правоту Незнайки? Если Незнайка все же ошибся, то как правильно решить задачу?

11. Туз бубен (От 8 класса, 2 балла). Тридцать шесть игроков играют в игру: из карточной колоды, в которой 36 карт, они по очереди выбирают по случайной карте. Если игроку попался туз бубен, то игрок выиграл; если же попалась другая карта, игрок возвращает её в колоду, и карту тянет следующий игрок. Так они тянут карты по кругу: сначала первый, затем второй и т.д. Если на первом круге никому не попался туз бубен, игроки в том же порядке тянут карты по второму кругу. Это продолжается до тех пор, пока кто-то из них не вытянет туза бубен.

Предположим, что перед началом игры игроки сделали ставки, и выигравший забирает их все. Как должны относиться ставки игроков, чтобы игра стала безобидной, то есть математические ожидания выигрыша у всех игроков оказались равны между собой (то есть равны нулю с учётом внесенной суммы)?

12. Зимний лагерь. В зимнем лагере в комнате живут Ваня и Гриша. Каждый вечер они бросают жребий, кому гасить свет перед сном: дело в том, что выключатель около двери, и проигравшему приходится идти к кровати в полной темноте, натыкаясь на стулья.

Обычно Ваня и Гриша бросают жребий без затей, но в этот раз Гриша придумал особенный жребий:

– Давай бросать монету. Если при каком-то чётном броске выпадет орёл, то дальше монету не бросаем: я выиграл. Если же при каком-то нечётном броске выпадет решка, то выиграл ты.

а) **(от 8 класса, 2 балла).** Какова вероятность выигрыша Гриши?

б) **(от 8 класса, 2 балла).** Найдите математическое ожидание числа бросков монеты до окончания жребия.

13. Короткий алгоритм (от 8 класса, 2 балла). Есть 4 монеты разного веса. За одно действие можно взвесить две монеты на чашечных весах без гирь и узнать, какая из них тяжелее. Требуется упорядочить монеты по весу. Покажите, что существует способ упорядочить монеты, при котором математическое ожидание числа взвешиваний меньше, чем 4,8.

14. Ошибка стажёра (от 8 класса, 3 балла). На хлебозаводе дозирующий автомат отмеряет порции теста массой 400 г. Принято правило: если стандартное отклонение десяти случайных измерений превосходит 5% номинальной массы порции, то автомат требует ремонта.

Для проверки автомата юный стажёр Иванов взвесил 10 случайных порций, отмеренных автоматом, с точностью до грамма и записал в таблицу, на сколько граммов порции отличаются в ту или иную сторону от номинальной массы 400 г.

Номер порции	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отличие от 400 г	12	32	18	19	28	15	7	22	12	21

Молодой инженер Петров рассердился и сказал, что вся работа насмарку, поскольку знаки отклонений неизвестны, и он не может вычислить ни стандартное отклонение, ни даже среднее арифметическое.

Опытный мастер Сидоров лишь покачал головой и заявил, что всё не так плохо. Конечно, найти стандартное отклонение невозможно, но можно математически доказать, что автомат ремонта не требует. Как мог рассуждать мастер Сидоров?

15. Красное и чёрное (от 8 класса, 3 балла). Банкомёт[3] по одной сдаёт игроку карты из хорошо перетасованной обычной карточной колоды. В любой момент, пока у банкомёта еще остались карты, игрок может сказать «Стоп». После этого банкомёт открывает ещё одну карту. Если она красной масти, то игрок выигрывает, если чёрной, то проигрывает.

Существует ли у игрока стратегия, при которой вероятность выигрыша больше, чем 0,5?

---

[3] В некоторых карточных играх тот, кто сдает игрокам карты, называется банкомётом.

16. Почтовые ящики. В новом только что заселённом многоквартирном доме рабочие повесили блок из 80 почтовых ящиков. Внутрь каждого ящика они положили кольцо с ключом и биркой с номером квартиры, но не позаботились о том, чтобы в каждом ящике лежал ключ от этого ящика. Они просто покидали ключи в ящики в случайном порядке. Ящики, разумеется, заперты.

Рассеянный Учёный, недавно поселившийся в квартире 37, обрадовался, увидев ящики, но консьержка сказала, что достать ключи она не может. Нужно идти в управляющую компанию, которая осуществляет приём граждан каждый третий понедельник месяца с 12.00 до 12.30.

Найдя в мусорной урне палочку (кто-то заказывал суши), Учёный с четвёртой попытки сумел извлечь ключ из ящика № 37. Он рассуждал следующим образом: если это ключ от моего ящика, то всё хорошо. Если нет, то я открою ящик, от которого этот ключ, ключ оставлю в замке, выну из ящика следующий ключ, открою им следующий ящик и так далее, пока не достану свой ключ.

а) **(от 8 класса, 3 балла).** Докажите, что описанный алгоритм результативен, то есть что Рассеянный Учёный найдёт свой ключ.

б) **(от 9 класса, 6 баллов).** Найдите математическое ожидание числа жильцов, которым придётся ковырять в ящиках палочкой, если все они будут следовать алгоритму Рассеянного Учёного.

17. Счастливые суммы (от 8 класса, 4 балла). В лотерее «Счастливая сумма» всего N шаров с номерами от 1 до N. Во время основного тиража случайным образом выпадают 10 шаров. Во время дополнительного тиража из этого же набора шаров случайно выбирают 8 шаров. Сумма номеров на выпавших шарах в каждом тираже объявляется *счастливой суммой,* и те игроки, кто эту сумму предсказал, получают выигрыш.

Может ли быть, что события A «в основном тираже счастливая сумма равна 63» и B «в дополнительном тираже счастливая сумма равна 44» равновероятны? Если да, то при каком условии?

18. Везучий шпион (от 9 класса, 2 балла). В абсолютно случайную точку абсолютно квадратного леса 10×10 км на парашюте спускается шпион с радиопередатчиком. Приземлившись, он немедленно начинает радиопередачу, сообщая противнику важные сведения.

Во всех четырёх углах леса расположены радиопеленгаторы, каждый из которых обнаруживает работу передатчика на расстоянии не более 10 км. Чтобы контрразведка точно определила координаты работающего передатчика, нужно, чтобы передатчик был обнаружен хотя бы двумя пеленгаторами.

Шпиону повезло: один из радиопеленгаторов сегодня не работает. Какова вероятность того, что контрразведчики не смогут определить координаты места, где приземлился шпион?

19. Маршрутное такси. Проезд в маршрутке стоит 75 рублей. Пятнадцать пассажиров заходят поодиночке и между собой деньгами не меняются. С вероятностью 0,5 пассажир даёт водителю купюру 100 рублей и получает 25 рублей сдачи монетами по 5 или 10 рублей, а с вероятностью 0,5 пассажир даёт водителю 50 рублей одной купюрой и 25 рублей монетами.

а) **(от 9 класса, 5 баллов)** Перед рейсом у водителя монет не было вообще. Какова вероятность того, что водитель сможет немедленно дать сдачу каждому, кто расплачивается купюрой 100 рублей?

б) **(от 9 класса, 7 баллов)** Какую сумму монетами должен иметь водитель перед выездом, чтобы с вероятностью не менее 0,95 иметь возможность немедленно дать сдачу всем пассажирам, расплатившимся сторублёвкой?